بسم الله الرحمن الرحيم

※ Landau-Ginzburg Theory

chapter 1 and 2 Kardar
Statistical physics of fields

① Atomistic Nature of Matters

② Describing the laws governing the Intractions and Dynamics of Particles (Many Bodys)

بس ذره‌ای

Some challenges

① How these underlying elements lead to the different forms of matter in the Macroscopic scale?

② Microscopic Description of Matters is given by:

$$\{\vec{q}_i, \vec{p}_i\} \quad , \quad \{S_i\} \quad , \quad \{n_i\}$$

③ The Evolution of all Degrees of freedom is given by $\mathcal{H}_{\text{Many-Body}}$

$$\mathcal{H} = \sum^{N} \frac{p_i^2}{2m} + \sum' U_{ij} + \dots\dots$$

1 mole 10^{23} - Particles

More Realistic Case (Intraction)

④ For Macroscopic Description, We Usually use a few Phenomenological Variables

متغیرهای پدیدشناختی

$T, P, V, E, S, \ldots$ Not ab-initio

$$P = \frac{F}{A} = \frac{d\langle mv\rangle}{dt\,dA}$$ → Eensemble average

"Effective Description"

$$\mathcal{H}_{\text{Microscopic}} \longrightarrow \mathcal{H}_{\text{effective}}$$

درجات آزادی غیرمرتبط

Integrate out on Some Irrelevant degrees of freedom

Marginalization

کالرسازی

M

T

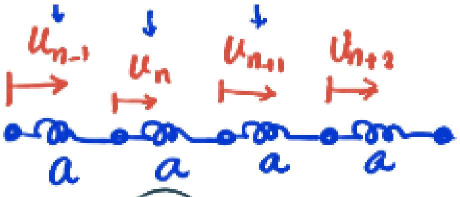
$$m \longrightarrow \sum J_{ij} S_i S_j$$

$J > 0 \rightarrow$ Ferromagnet

$J < 0$ Anti...

Ex: Collective behavior رفتار جمعی

مطالعه یک سیستم از ذرات ← میدان

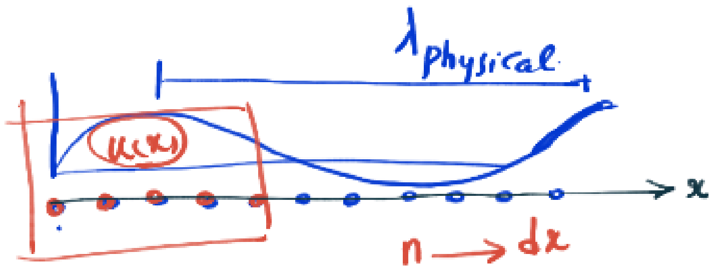


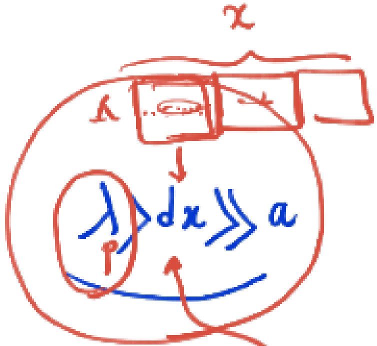
$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{(m\dot{u}_n)^2}{2m} + \frac{1}{2} K (u_{n+1} - u_n)^2 \right]$$

$\sum \to \int \frac{d^d x}{a^d}$

$$u(t) = A e^{i\omega t}$$

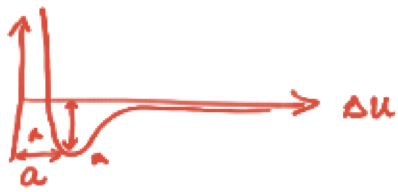
$$m\ddot{u} = F = -\nabla V$$





$$\left\{ \begin{array}{l} V = \sum_n \frac{1}{2} K (u_{n+1} - u_n)^2 \\ u_n \to u(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_n \to \int \frac{d^d x}{a^d} \\ u_n \to u(x)\big|_{x=na} \\ u_{n+1} - u_n \to \partial_x u(x)\big|_{x=na} \end{array} \right.$$

ϕ



انرژی پتانسیل

انرژی

$$V = \int \frac{1}{2} K' (\partial_x u)^2 \, dx$$

$$V[u] = \int dx \, \underbrace{\phi(u(x), \partial_x u(x), \ldots)}_{\text{چگالی انرژی پتانسیل}}$$

---

① $\lambda_{Phy.} \gg dx \gg a$

② $\mathcal{H} = \int \frac{d^d x}{a^d} \, \underbrace{\bar{H}(u(x), \partial_t u, \partial_x u, \ldots)}$

Hamiltonian Density

$$L = \int \frac{d^dx}{a^d}\, \mathcal{L}(\qquad)$$

$$V = \int \frac{d^dx}{a^d}\, \underbrace{\phi(u, \partial_x u, \dots)}_{\text{چگالی}}$$

$$\mathcal{H} = \int_{\sim a}^{\infty \leftarrow L} dx \left[\frac{1}{2} m (\partial_t u)^2 + \frac{1}{2} K' (\partial_x u)^2 \right]$$

$K \ll a^{-1}$ UV-cutoff

IR ~~cut off~~

چگونگی استنباط شکل چگالی پتانسیل برای زنجیره‌ای از ذرات با برهمکنش نوسانگر هماهنگ

(A) Translational Symmetry

$$\phi(u(x)+c) = \phi(u(x)) \rightarrow \phi(\cancel{u(x)})$$

(*) اطلاعات اولیه از فیزیک مشاهده شده مورد مطالعه به دست آوردیم - از آن استفاده کردیم

(B)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \cancel{\frac{\partial \phi}{\partial u}} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{غیر صفر}} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \cancel{\frac{\partial \phi}{\partial u}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$u(x)$ An-Harmonic

$$V[u] = \int \frac{d^dx}{a^d} \left[\underbrace{\frac{K'}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}_{\text{Harmonic approximation}} + l' \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \dots \right]$$

$$\vec{u}(K) = \int d^dx\, e^{i\vec{K}\cdot\vec{x}}\, \vec{u}(x)$$

$$\mathcal{H} = \int \frac{d^dK}{(2\pi)^d} \left[\frac{\rho}{2} |\dot{u}(\vec{k})|^2 + \frac{\mu}{2} K^2 |u(k)|^2 + \dots \right]$$

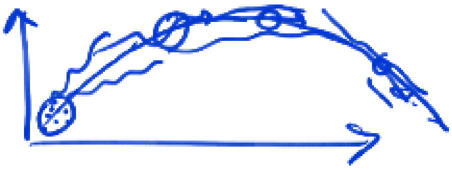
K'

$M = \int \rho\, d^dx$

To determine thermodynamical Properties of Many-Body System

$$\begin{cases} ① \quad Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta \mathcal{H}} \quad , \quad \mathcal{H}_{mic} = \checkmark \\ ② \quad f = -\dfrac{kT \ln Z}{V} \end{cases}$$

ab initio → { Fundamental particles, Intraction }



← Center of Mass

"Effective approach":

$$\left\{ \begin{array}{l} S = \int dt\, L \\ L = \int d^3r\, \mathcal{L} \end{array} \right\} \rightarrow S = \int d^4x\, \mathcal{L} \rightarrow$$

atomic scale → $a \ll \Lambda < \xi \sim L$ → Size of System } *

Λ: Smoothing Scale

ξ: Correlation length scale

لذا می‌توان توصیف مؤثر را در پیش گرفت

هامیلتونی مؤثر است

← چه ارتباطی بین پتانسیل های ترمودینامیکی و هامیلتونی مؤثر وجود دارد؟

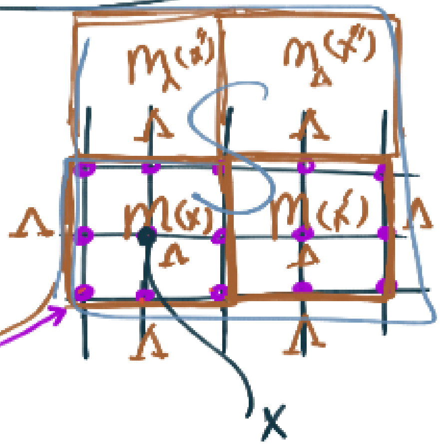
$$Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta \mathcal{H}_{mic}} \xleftrightarrow{?} \mathcal{H}_{eff} \qquad Z' = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta \mathcal{H}_{eff}}$$

$$\sum S_i S_j \cdots$$

$$F = -KT \ln Z \qquad F' = -KT \ln Z'$$

$$F \xleftrightarrow{?} F'$$

$$a \ll \Lambda < \xi \sim l$$



$$S_i = \pm 1 \rightarrow \delta_D(S_i^2 - 1)$$

$$e^{-\lambda (S(i)^2 - 1)^2}$$

مربوط به قبل

Kernel (Greens func)

$$\underbrace{m_\Lambda(\vec{x})} = \int dx' \, K_\Lambda(x - x')\, S(x')$$

Window funct

$$e^{-\beta L} \equiv \underbrace{W_m(\bar{x})}_{Z'} = \mathrm{Tr}\Big\{ \underbrace{e^{-\beta \mathcal{H}_{mic}}}_{Z} \underbrace{\delta_D \Big[\sum_{i \in x} S_i - \tilde{m}_\Lambda(x) N_\Lambda(x) \Big]}_{\text{Constraint}} \Big\}$$

Landau free Energy

قید

$$Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta \mathcal{H}_{mic}}$$

$\beta \mathcal{H}_{mic}(x)$

$$W(x) = \frac{e^{-\beta \ldots m}}{Z}$$

احتمال اینکه یک پیکربندی، دیگری مشخص داشته باشیم را نشان می دهد

$$\{S_i\} : \{S_1, S_2, S_3, \ldots S_N\}$$

$$W_m(x) \overset{q}{\not\leftrightarrow} Z$$

$$\{S\} = \{S\}' + \{S\}''$$

بقیه پیکربندی ها

نماد کلیه پیکربندی های موجود

آن دسته از پیکربندی هایی که با قید m_A سازگار است

$$Tr \equiv \sum_{\{S\}} = \sum_{\{S\}''} \sum_{\{S\}'}$$ ← General Notation

Ex: $N=3$, $S_i = \pm 1$, $i=1,3$

$$\{S\} = \left\{ \{+1,+1,+1\}, \{+1,+1,-1\}, \{+1,-1,+1\}, \{+1,-1,-1\}, \{-1,+1,+1\}, \{-1,-1,+1\}, \{-1,+1,-1\}, \{-1,-1,-1\} \right\}$$

$\{S\}''$ $\qquad$ S'

Helmholtz free Energy

$$e^{-\beta F} = Z = \sum_{\{S\}} e^{-\beta \mathcal{H}_{mic}} =$$

$$\sum \sum e^{-\beta \mathcal{H}_{mic}}$$

$$= \underbrace{\sum_{\{s\}''} \sum_{\{s\}'} e^{-\beta \mathcal{H}_{mic}}}_{W_m(x)}$$

$$Z = \sum_{\{s\}''} W_m$$

آیا علی الاصول تخمین W به راحتی امکان پذیر است؟

field

Recall

$$\begin{cases} S_i \longrightarrow \underset{\Lambda}{\tilde{m}}(x) \\ \sum_i \longrightarrow \int \frac{d^d x}{a^d} \\ \sum_{\{s\}} \longrightarrow \int \prod_{i=1}^{N_\Lambda} dS_i = \int \underbrace{D m_\Lambda(x)} \end{cases}$$

$$\sum_{ij} S_i S_j \to \int dx\, dy\, \underbrace{\tilde{S}(x) S(y)}$$

$$H \sum_i S_i \to \underbrace{\int H\, S(x)\, dx}$$

$$Z = \sum_{\{s\}} e^{-\beta \mathcal{H}(\{s\})} = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta \mathcal{H}(\{s\})}$$

$$\underbrace{Z_\Lambda = \int D m_\Lambda\, e^{-\beta \mathcal{H}_\Lambda [m_\Lambda]}} = \int D m_\Lambda\, e^{-\beta L_\Lambda [m]}$$

$$\underbrace{e^{-\beta F}} = Z = \int D\vec{m}\, \tilde{W}_m(x)$$

پدیده شناختی

$L \leftarrow$ مبتنی بر تقارن‌ها

$$Z = \int D\vec{m}\, \underbrace{e^{-\beta L_\Lambda([m])}}$$

$$\sum_{\{s\}'} e^{-\beta \mathcal{H}_{mic}}$$

انتظار اینکه تعداد محدودی

کوپل‌های غیر صفر داشته باشیم

دور از ذهن نیست (غیر منطقی به نظر نمی‌رسد)، تعاریف‌ها این حالت‌ها را کنترل می‌کنند — وقتی ... هم ...

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ F & \overset{?}{\longleftrightarrow} & L \end{array} \longrightarrow F \neq L$$

احتمالاً در یک سری تقریب‌هایی می‌توان معادل هم در نظر بگیریم

(تقریب‌های مختلفی در نظر می‌گیریم)

$$L[m] = \int d^d x \, \mathcal{L}[m, \partial m, \ldots]$$

$$= L[m]_0 + \frac{\partial L}{\partial [m]}\Big|_{[m]=[m]_0} [\Delta m] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial [m]^2} [\Delta m]^2 + \ldots$$

$$\frac{\partial L}{\partial [m]} = 0$$

$$[m] \to [m]_0 + [\Delta m] = [m]_0 + [\psi]$$

$[m]_0$: مقدار پارامتر نظمی است که تابع انرژی آزاد را کمینه می‌کند

$[\psi]$: انحراف

$$\boxed{L[m] \simeq L[m]_0} \; *$$

$$e^{-\beta F} = Z = \int Dm \, e^{-\beta L[m]} \simeq \int Dm \, e^{-\beta L[m]_0}$$

$$e^{-\beta F} \sim e^{-\beta L[m]_0}$$

$$F \simeq L[m]_0 \longleftarrow$$ تقریب مرتبه صفر

F: ?

$L[m]_0$: MF

$$\boxed{F^{MF} \geqq F}$$

نقطه شروع را از ایده پدیده‌شناختی انتخاب کنیم

می‌خواهیم سیستمی را توصیف کنیم که دارای ویژگی‌های زیر است،

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \vec{x} : (x_1, \dots x_d) \in \mathbb{R}^{(d)*} \\ \vec{m}(\vec{x}) : (m_1(\vec{x}_1), \dots m_n(\vec{x}_n)) \in \mathbb{R}^{(n)} \end{array}\right. \\ \left[n\text{-field in } d\text{-Dimension} \right] \end{array}\right.$$

Ex $\left\{\begin{array}{l} n=2,\ d=1 \\ n=3, \end{array}\right.$

classical magnet

$n=1 \longrightarrow$ liquid Gas, ...

Landau- Ginzburg :

$$W[\vec{m}(\vec{x})] = e^{-\beta L[m]}$$

$$\underbrace{L[m]}_{\text{پتانسیل موثر}} = -KT \ln W[m]$$

→ ① <u>Locality</u> $\qquad L[m] = \int d^d x \, \underset{\sim}{\mathcal{L}[m]}$

→ ② Analyticity and Polynomial Expans of $[m]$

$$\begin{cases} \mathcal{L}[m, \partial_x m, \ldots] \\ \mathcal{L} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n([K])\, m^n \end{cases}$$

Coupling Constant $(H, T, \ldots)$

→ چون ترتیب H_0 کوچکه

برای مثال → $f = a_0 + a_2 m^2 + a_4 m^4 + \cancel{a_1 m}$ — ∇m — Hm

$$Z = Z_0 \langle e^{-\beta \Delta \mathcal{H}} \rangle_0$$

m

order Param

T

$$\begin{cases} m = 0 & \text{For } T > T_c \\ m \neq 0 & \text{For } T < T_c \end{cases}$$

③ Symmetries

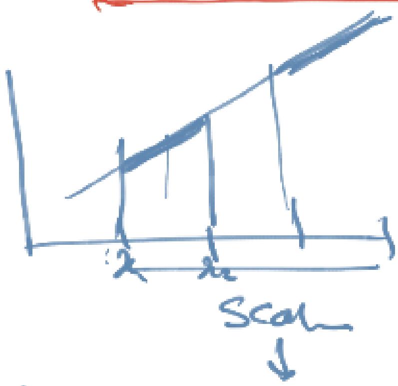
شکل $\mathcal{L}$ باید تقارن‌های مسئله احترام بگذارد

Global

Coarse graining

خودتشابهی (Self-Similarity)

در نزدیکی نقطهٔ بحرانی → تعداد کل‌های ما نامحدود خواهد بود چون تقارن‌ها محدود هستند

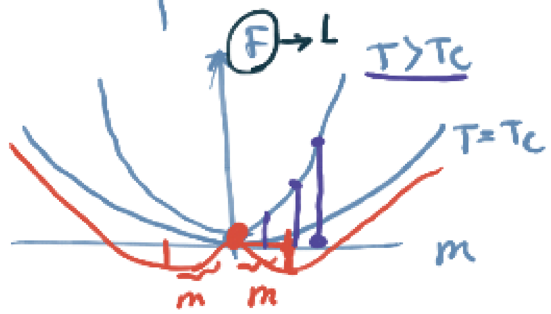


④ Stability

$e^{-\beta L}$

به بیان دیگر ضرایب m^n که یعنی a_n باید به نحوی باشد که انتظار داریم رفتار پارامتر نظم با آزمایش همخوانی داشته باشد.

$$[m]_0 \begin{cases} m(T > T_c) = 0 \\ m(T < T_c) \neq 0 \end{cases}$$ محدود →



درنتیجه → $\boxed{a_4 > 0}$

$\boxed{a_2 ?}$

Summary

$$e^{-\beta \check{F}} = Z = \int Dm\, e^{-\beta \overbrace{L[m]}^{\text{Landau free Energy}}}$$

$$L = \int d^dx\, \underbrace{\mathcal{L}[m, \partial_x m, \dots]}_{\text{چگالی انرژی لانداو}}$$

$$\mathcal{L} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n([K])\, m^n + \dots$$

$[K] \equiv$ Coupling Constants $\overbrace{\{t, h, u\}}^{\text{Ising model}}$ ($t \uparrow T$, $h \uparrow H$)

$\phi \equiv m \equiv$ Order Parameter

Ex: Scalar Model.

$$L[\phi] = \int d^dx \left[a_0 + \underset{\text{Mass}}{a_2 \phi^2(x)} + \underset{\text{Intraction}}{a_4 \phi^4(x)} + \underset{\text{Kinetic Energy}}{(\nabla\phi)^2} \right]$$

$a_1 = 0 \longrightarrow Z_2$- Symmetry

$$e^{-\beta L[\phi]}$$

$$\phi : \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi \end{pmatrix}$$

Ex: O(n) :

$$L[\phi] = \int d^dx \left\{ a_0 + a_2 \phi^T\phi + a_4 (\phi^T\phi)^2 + (\nabla\phi^T \nabla\phi) \right.$$

(5.6) page 147:

$$L = \int d^dx \, \mathcal{L}[\phi(x), \partial\phi(x) \dots]$$

$$e^{-\beta F} = Z = \sum_{\{s\}} e^{-\beta L[\phi]}$$

$$\boxed{e^{-\beta F} = \int D\phi \, e^{-\beta L[\phi]}}$$

Zero-approximation $\quad Z \simeq e^{-\beta L[\phi]_0}$

$[\phi]_0 \equiv$ مقداری از پارامتر نظم است که L را کمینه می‌کند.

$\longrightarrow [\phi]_0 = \langle\phi\rangle = \langle s\rangle = m$

$$\boxed{\mathrm{Min}\{L\} = L[\phi]_0 \simeq F[\phi]_0}$$

تقریب مرتبه صفرم

اثبات اینکه $[\phi]_0$ همان متوسط مثلاً مغناطش است بر حسب مسئله مغناطیسی به شرح زیر است

$$\int d\ldots \beta[\phi]$$

$$Z = \int D\phi \, e^{-} \quad , \quad \underbrace{[\phi] = [\phi]_0 + [\psi]}$$

$$L[\phi] = L[\phi]_0 + \psi \frac{\partial L}{\partial \phi}\Big|_{[\phi]=[\phi]_0} + \frac{1}{2}\psi^2 \frac{\partial^2 L}{\partial \phi^2}\Big|_{[\phi]=[\phi]_0} + \cdots$$

که $[\phi]_0$ جایی است که L را کمینه کرده است

$$Z = \int D\phi \, e^{-\beta L[\phi]_0 - \frac{\beta}{2}\psi^2 \frac{\partial^2 L}{\partial \phi^2}\Big|_{[\phi]=[\phi]_0} + \cdots}$$

$$\text{If } [\psi] \ll [\phi]_0 \longrightarrow O([\psi]^2) \sim 0$$

$$\boxed{F \simeq L[\phi]_0}$$

در تقریب صفرم

$$\boxed{m = \frac{\partial \ln Z}{\partial H}\Big|_{H=0} = -\frac{\partial F}{\partial H}\Big|_{H=0}}$$

$a_1 [\phi]$

$$\text{If } H \neq 0 \longrightarrow L[\phi]_0 \longrightarrow \underbrace{L[\phi]_0 - H[\phi]_0}$$

$$Z \sim e^{-\beta L[\phi_0] + \beta H [\phi_0]}$$

$$\boxed{F_{min} = L[\phi]_0 - H[\phi]_0} \quad , \quad \boxed{F = L[\phi] - H[\phi]}$$

$$[\phi]_0 = ? \longrightarrow \frac{\partial F}{\partial [\phi]} = 0 \longrightarrow [\phi]_0 = \checkmark$$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \phi}\Big|_{\phi_0} = \frac{\partial L[\phi]}{\partial \phi} - H = 0$$

$\phi = \phi_0$

$$\boxed{\left.\frac{\partial L[\phi]}{\partial \phi}\right|_{\phi=\phi_0} = H}$$

$$\underset{\text{تعادلی بعد}}{m_0} = -\frac{\partial F}{\partial H} = -\frac{\partial}{\partial H}\left[\underbrace{L[\phi]_0 - H[\phi]_0}\right]$$

$$m_0 = -\frac{\partial L[\phi]_0}{\partial H} + [\phi]_0 + H\frac{\partial [\phi]_0}{\partial H}$$

$$m_0 = -\frac{\partial L[\phi]_0}{\partial [\phi]_0}\frac{\partial [\phi]_0}{\partial H} + [\phi]_0 + H\frac{\partial [\phi]_0}{\partial H}$$

$$m_0 = \frac{\partial [\phi]_0}{\partial H}\left\{-\frac{\partial L[\phi]_0}{\partial [\phi]_0} + H\right\} + [\phi]_0$$

$$= \frac{\partial [\phi]_0}{\partial H}\left\{-H + H\right\} + [\phi]_0$$

$$\boxed{m_0 = [\phi]_0}$$

اگر بپذیریم که سیستم خاصیت خود متشابهی دارد. لذا از یک حجم کوچک

تغییر $m = \langle S \rangle$ در یک ناحیه ثابت حفظ شدگی لزومی ندارد که اندازه مقیاس

شروع به کوچک کردن کنیم $[\phi]$ میدان نرم شده m_Λ

$$\boxed{a \ll \Lambda \lesssim \xi \sim L}$$

$$m_\Lambda = \int K(x-x')\, S(x')\, d^d x'$$

$m_0 = \langle S \rangle$ تعادلی می‌شه

۴.۳ اصول اولیه ریاضیات نظریه

LGW - Theory

$$\mathcal{L}[\phi] = \mathcal{L}[m] = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\overbrace{a_n([K], t)}^{t<0\,,\,t>0}}\, m^n + \cdots\cdots$$

سری جملاتی که به مشتقات مربوط هستند

هدفی که دنبال می‌کنیم این است که چگونه a_n را تعیین می‌کنیم؟ ۱ ۲ ۳ ۴ مدنظر داریم

① $a_0 =$ عدد ثابت $\rightarrow$ تغییر در مبدأ پتانسیل $\rightarrow$ $a_0 = 0$

② $a_1, a_3, \ldots a_{2n+1} = 0$ درصورتی که تقارن Z_2 را داشته باشیم

③ $\rightarrow \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial m} = 0 \qquad \dfrac{\partial L}{\partial m}, \quad L = \int d^dx\, \mathcal{L}$

$\downarrow$

برای مثال برای سیستم فرومغناطیسی $\quad 0 = \left.\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial m}\right|_{\substack{T>T_c \\ t>0}} \longrightarrow m = 0$

$$\rightarrow \mathcal{L} = a_1 m + a_2 m^2 + a_3 m^3 + \underbrace{\tfrac{1}{2} a_4 m^4}\cdots$$

$$\downarrow$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m} = a_1 + \underbrace{2a_2 m}_{m=0} + \underbrace{3a_3 m^2}_{m=0} + \underbrace{4a_4 m^3}_{m=0} = 0 \xrightarrow[\text{for } t>0]{T>T_c} \underline{m=0}$$

$$\boxed{a_1 = 0}$$

④ $a_3, a_5 \ldots = 0 \longrightarrow$ If we have Z_2-Symmetry

۵ $a_4 > 0 \longrightarrow \underline{|m| \to \infty} \to \min\{\mathcal{L}\}$

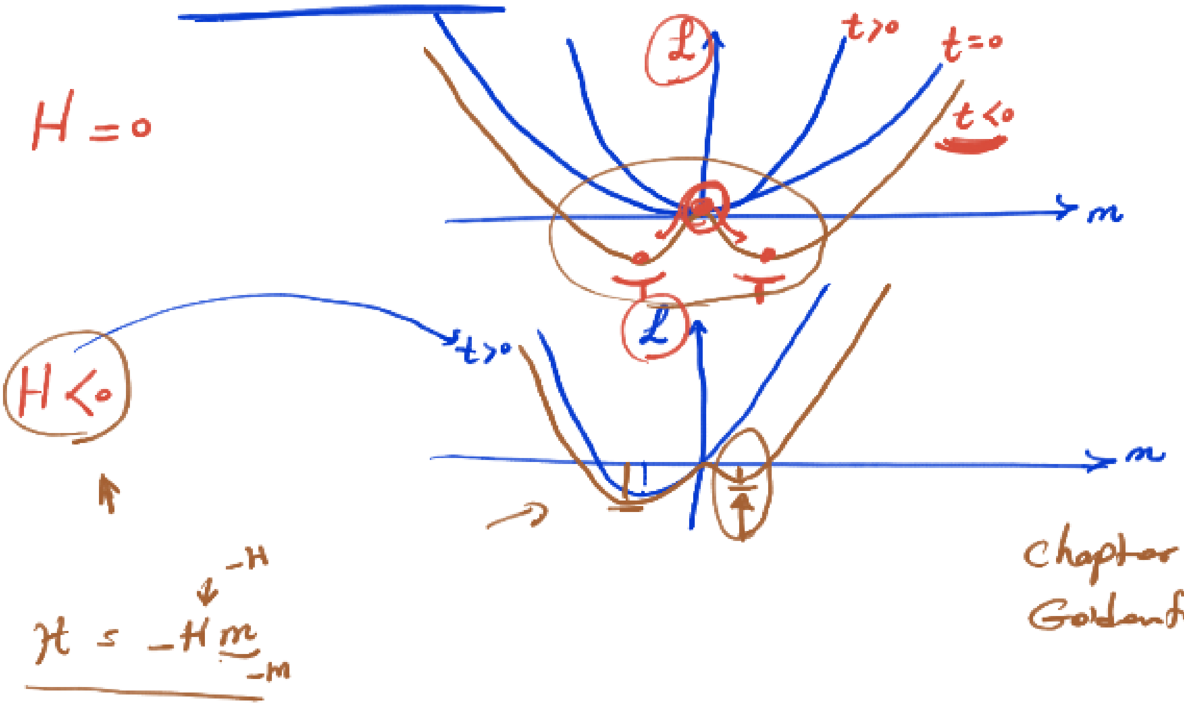
با انتظارات سازگاری ندارد (حضور جمله گذار فاز مرتبه دوم با در نظر گرفتن

آهسته رخ میدهد ← گذار فاز مرتبه دوم $\begin{cases} m = 0 & \text{for } t > 0 \\ m \neq 0 & \text{for } t < 0 \end{cases}$

۴ If $H \neq 0 \Rightarrow \mathcal{L} = -Hm + a_2(t) m^2 + a_4 m^4 + \dots$

۷ $\begin{cases} a_2 < 0,\ a_4 > 0 \quad \text{for } t < 0 \to m \neq 0 \to \min\{\mathcal{L}\} \checkmark \\ a_2 > 0,\ a_4 > 0 \quad \text{for } t < 0 \to m = 0 \to \min\{\mathcal{L}\} \times \\ a_2 > 0,\ a_4 < 0 \quad \to m \to \infty \to \min\{\mathcal{L}\} \times \end{cases}$

Ex: Continuous phase Transition



Chapter 5
Goldenfeld

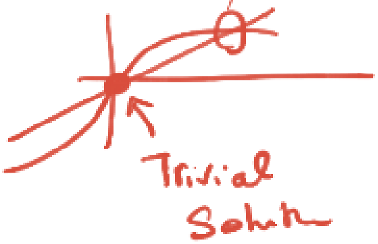
$$\mathcal{L} = -Hm + a_2 m^2 + a_4 m^4 + (\partial_x m)^2$$ شکل کلی

for $H = 0 \longrightarrow \underline{\mathcal{L} = a_2 m^2 + a_4 m^4}$, $L = \int d^d x\, \mathcal{L}$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m}\Big| \quad 2a_2 m + 4a_4 m^3 \begin{cases} t > 0\ (T > T_c) \longrightarrow m_0 = 0 \end{cases}$

$$\left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m}\right|_{m=m_0} = 2a_2 m + 4a_4 m^3 \quad t<0 \ (T<T_c) \rightarrow m_0 \neq 0$$

$$2a_2 + 4a_4 m^2 = 0$$



جواب غیربدیهی

$$m_0^2 = -\frac{a_2}{2a_4} \rightarrow \boxed{m_0 = \pm\sqrt{\frac{-a_2}{2a_4}}}$$

$a_2(t) \rightarrow$ for $t<0$ $\quad a_2(t<0) < 0 \ — \ m_0 \neq 0$ ✓

for $t>0$ $\quad a_2(t>0) > 0 \longrightarrow m_0 = 0$ ✓

می‌توان دید که شکل زیر را دارد

$$a_2(t) = a_2^{(0)} + a_2^{(1)} t + a_2^{(2)} t^2 + \cdots$$

$$\langle \eta(t)\eta(t')\rangle = 2\sigma\delta$$

$$m_0 = \pm\sqrt{\frac{-a_2(t)}{2a_4(t)}} = \pm\sqrt{\frac{-a_2^{(0)} - a_2^{(1)} t + \cdots}{2a_4(t)}}$$

$$0 = m_0(t=0) = \pm\sqrt{\frac{-a_2^{(0)}}{2a_4(t)}} = 0 \implies a_2^{(0)} = 0$$

$$a_4(t) = a_4^{(0)} + a_4^{(1)} t + \cdots$$

اگر در نظر بگیریم

$$m_0(t) = \pm\sqrt{\frac{-a_2^{(0)} - a_2^{(1)} t - \cdots}{2[a_4^{(0)} + a_4^{(1)} t + \cdots]}}$$

اگر فرض کنیم $a_4^{(1)} \neq 0$

سهم غالب را در $a_4(t)$ جمله $a_4^{(0)}$ در نظر می‌گیریم

$$\boxed{a_4(t) = a_4^{(0)} = cts}\ ,\ \boxed{a_2^{(0)} = 0}\ ,\ \boxed{a_2^{(1)} = t}$$

$$\boxed{\mathcal{L} = -Hm + t m^2 + a_4 m^4 \qquad a_4 > 0}$$

بخش غالب تیلور لانداو که نشست هم:

← در مواردی $\mathcal{L}$ توصیف گر مناسبی از سیستم نباشد →

Ginzburg-Criterion

* Chapter 6- Goldenfeld *

$$C_V = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\Big|_{m=m_0} = -T \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial T^2}\Big|_{m=m_0}$$

$$\boxed{F \sim \mathcal{L}[m_0]}$$

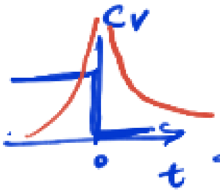
تقریب صفرم

for $t>0$ $(T>T_c)$ — $m_0 = 0 \to \mathcal{L} = 0 \to C_V^{(m)} = 0$

for $t<0$ $(T<T_c)$ $\to$ $\underset{(H=0)}{m_0 \neq 0} \to \mathcal{L} = \underbrace{t}_{a_2(t)} m^2 + \underbrace{a_4^{(0)}}_{\text{ثابت}} m^4$

$$m_0 = \pm\sqrt{-\frac{t}{2a_4^{(0)}}}$$

$$C_V(t<0) = cts.$$



$$C_V(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t>0 \\ cts & \text{for } t<0 \end{cases} \to \boxed{\alpha = 0}$$

Mean field

در تقریب صفرم بدست آمده

یادمان باشد که مستقیماً از L استفاده کردیم نه از F

بعداً در تقریب بهتر (گوسی) ← ناپیوستگی لگاریتمی خواهد شد

بعداً محاسبه خواهیم کرد.

$$F = -KT \ln Z$$

$$Z = Tr\{e^{-\beta H}\} = Tr\{e^{-\beta[H_K + H_{In} + H_{mag} + \dots]}\}$$

$$C_V = \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} =$$

$$= Z_{Kin} Z_{In} Z_{Mag} Z_{Vn} Z_{Ren}$$

$$F = \underbrace{F_{Kin} + F_{Jn} + F_{mag} + F_{el} + F_{e}}$$

$$C_V = C_V^{Fr} + C_V^{mag} + C_V^{R} + C_V^{V-}$$

محاسبه نماهای بحرانی

for $H \neq 0$ $\quad \mathcal{L} = -Hm + tm^2 + a_4^{(0)} m^4$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m} = -H + 2tm + 4a_4^{(0)} m^3 \quad \xrightarrow{m \to 0} \quad m_0 \simeq \frac{H}{2t}$$

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial H}\Big|_{t \to 0} = ? \quad \longrightarrow \quad \chi \sim t^{-1} \sim t^{-\gamma}$$

$$\boxed{\gamma = +1}$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m}\Big|_{t=0} = -H + 0 + 4a_4^{(0)} m^3 = 0 \longrightarrow m \sim H^{1/3} \sim H^{1/\delta}$$

$$\boxed{\delta = 3}$$

Ex: First order Phase Transition

تمام رخدادهای بحرانی در مثال قبلی این بود به خاطر a_2 و a_4 الگوی

تشکیل دهیم که تغییرات آرام در هسته‌ی بزرگ m_0 وقتی شد

t تغییر می‌کرد به دست آوردیم

$$\boxed{\mathcal{L} = \underbrace{\overset{t}{a t}}\, m^2 + \underbrace{\tfrac{1}{2}\overset{a_4}{b}}\, m^4 + c\, m^3 - H m}$$

$a>0$
$b>0$
$c>0$

for $\underline{H=0}$ ($c \neq 0$) $\rightarrow \quad 0 = \left.\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial m}\right|_{m=m_0} = 2atm + 2bm^3 + 3cm^2$

$$m_0 = \begin{cases} m_0 = 0 \\ m_0 = -\bar{c} \pm \sqrt{\bar{c}^2 - \dfrac{at}{b}} \end{cases} , \quad \boxed{\bar{c} \equiv \frac{3c}{4b}}\ *$$

مثبت باشد غیر از $m_0=0$ جواب‌های حقیقی دیگری هم برای m_0

اشتباه کردم

$$\bar{c}^2 - \frac{at}{b} \geq 0 \longrightarrow \bar{c}^2 \geq \frac{at}{b} \rightarrow \boxed{\bar{c}^2 = \frac{at^*}{b}}\ *$$

زمانی که دقیقاً زیر رادیکال صفر می‌شود را t^* تعریف کردم

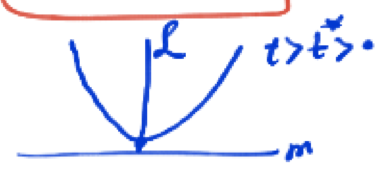
اگر $t<t^*$ جمله زیر رادیکال مثبت می‌شود و یعنی اینکه به غیر از $m_0=0$ مقدار حقیقی دیگری هم مورد قبول است.

$$\boxed{\frac{9c^2 b}{16 b^2 a} = t^*}$$

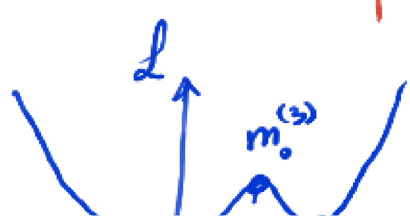
$$\boxed{\begin{matrix} t=0\ (T=T_c) \\ t^*>0 \end{matrix}}\ *$$

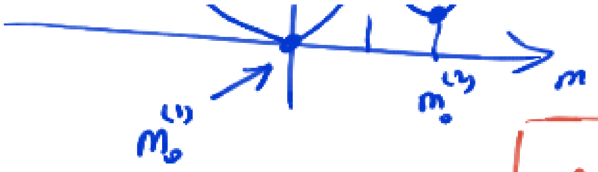
$t=0 \Rightarrow T=T_c$

① $t > t^* > 0 \rightarrow \boxed{m_0 = 0}$



② $t^* > t > 0 \longrightarrow \begin{cases} m_0^{(1)} = 0 \\ m_0^{(2)} = -\bar{c} + \sqrt{\bar{c}^2 - \frac{at}{b}} \\ m_0^{(3)} = -\bar{c} - \sqrt{\bar{c}^2 - \frac{at}{b}} \end{cases}$ $\quad \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial m}(m=m_0)$

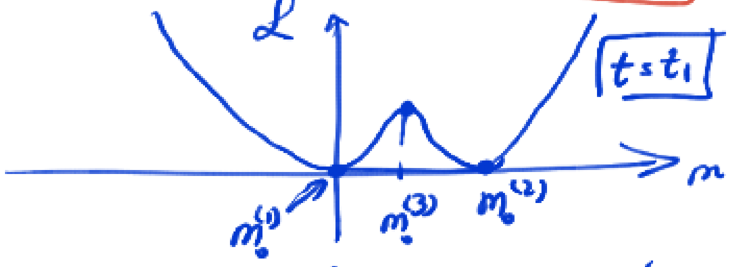




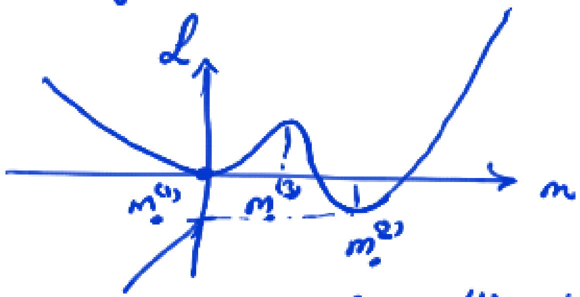
ϕ :

③ $t^* > t = t_1 > 0 \rightarrow \boxed{\mathcal{L}(m_0^{(1)}) = \mathcal{L}(m_0^{(2)}) = 0}$

$\boxed{t = t_1}$



④ $t^* > t_1 > t > 0$



$\mathcal{L}(m = m_0^{(2)}) < \mathcal{L}(m_0 = m_0^{(1)}) < \mathcal{L}(m_0 = m_0^{(3)})$

انتظار داریم مقدار تعادلی پارامتر نظم $m_0 = m_0^{(2)}$ رخ دهد

$\boxed{a = t}$ به‌عنوان تمرین

$b(t) =$ درواه

Ex: $\mathcal{L} = a m^2 + \frac{b}{2} m^4 - H m + c m^6$

$$\left\{ \begin{array}{l} b = \left\{ \begin{array}{ll} b > 0 & \text{for } T > T^* \\ b < 0 & \text{for } T < T^* \end{array} \right. \\ H = 0 \end{array} \right.$$

تعریف T^*

$b(t) = \bigcirc$ ..

if $T^* < T_c \longrightarrow$ Continuous phase transition

If $T^* > T_c \longrightarrow$ First order "

$T^{*} = T_c \longrightarrow$ [illegible]

$a(t), b(t) \rightarrow$ هردو همزمان ~~تعریف شد تک تغییر علامت می‌دهند~~

در زیر سیستم

T_c گذار منظم پیوسته

T^{*} گذار ناپیوسته

Beyond zero order approximat for Landau_Gin the

حل بعد

بسم الله الرحمن الرحیم

$$Z = \sum_{\{s\}''} \underbrace{\sum_{\{s\}'} e^{-\beta H_{mic}}} = \sum_{\{s\}''} W$$

$$e^{-\beta F} = Z = \int Dm \, e^{-\beta L[m]}$$

Landau-Ginzburge Action

$\boxed{F \neq L}$

روش خوش تعریفی که بتوان این کمیت را حساب کرد نداریم $\rightarrow$ روش پدیده‌شناختی

موضعی — تحلیلی — تقارن — پایداری

$$L[m] = \int d^d r \, \mathcal{L}\{m, \partial m, \dots\}$$

Zero-order approximation $\dfrac{\delta L[m]}{\delta [m]} = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [m]_0 \\ [\phi]_0 \\ [n] \end{array} \right.$

پارامترهای نظم

$$\left\{\begin{array}{l}[m]=[m]_0+[\Delta m]\\ [\phi]=[\phi]_0+[\psi]\\ [\eta]=[\eta]_0+[\Delta\eta]\end{array}\right. \longrightarrow \text{Zero-order}\ \{\Delta=0\}$$

میدان هستند

از جنس انرژی آزاد

$$\frac{1}{2}[\Delta m]^T \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial [m]^2}\cdot[\Delta m]$$

$$L[m]=L[m]_0+\underbrace{\frac{\partial L}{\partial [m]}\Big|_{[m]=[m]_0}}_{\text{صفر}\ 0}\Delta m+\frac{1}{2}[\Delta m]^2\frac{\partial^2 L}{\partial [m]^2}+O(\Delta m^3)$$

{d-Dimension, n-Field

$[\Delta m]_{n\times 1}$, $[\Delta m]^T_{1\times n}$

Perturbation

$$L[m]\simeq L[m]_0+\frac{1}{2}\Delta m^2\frac{\partial^2 L}{\partial [m]^2}\Big|_{[m]=[m]_0}$$

تقریب صفرم

تقریب اول

Gaussian approximation

Ex 1: $d=1$, $\boxed{n=1}$

حواستون باشه تو یک بعد

$$Z=\int D\phi\, e^{-\beta L[\phi]}=\int d\phi\, e^{-\beta L[\phi]}=\int d\phi\, e^{-\beta\int dr\, \mathcal{L}[\phi]}$$

$$L[\phi]=L[\phi]_0+\frac{(\phi-\phi_0)^2}{2!}\frac{\partial^2 L}{\partial\phi^2}\Big|_{\phi=\phi_0}+O(\Delta\phi^3)$$

ψ

$$Z=\int d\phi\, e^{-\beta L[\phi]_0-\frac{(\phi-\phi_0)^2}{2!}\frac{\partial^2 L}{\partial\phi^2}\big|_{\phi=\phi_0}+O(\Delta\phi^3)}$$

ثابت

$$\boxed{d\phi=d\psi}$$

$$e^{-\beta F}=Z=e^{-\beta L[\phi]_0}\int d\psi\, e^{-\frac{\beta\psi^2}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial\phi^2}\big|_{\phi=\phi_0}}$$

$$* \quad F = -kT \ln Z = L[\mathcal{H}]_0 - kT \ln\left(\int d\psi \, e^{-\beta \psi \frac{L}{2}}\right) \quad *$$

Recall : $\int d\psi \, e^{-\frac{\psi^2}{2\sigma^2}} = \sqrt{2\pi\sigma^2}$ "Gamma function"

~~نوسان~~ واریانس، پراکندگی، کوواریانس

Gaussian PDF $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, p(x) = 1$ ضریب بهنجارش

$$\sigma^2 = \underbrace{\langle (\psi - \bar{\psi})^2 \rangle}_{\Sigma} = \langle (\psi - \bar{\psi})(\psi - \bar{\psi}) \rangle$$

$$\bar{\psi} = \langle \psi \rangle = 0 \qquad \sigma^2 = \langle \psi \psi \rangle = \langle \psi^2 \rangle$$

Multi-variate Gaussian function

$$[\psi]_{n\times 1} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix}, \quad \langle \psi \otimes \psi \rangle = \mathrm{Cov}$$

فرض $\langle [\psi] \rangle = 0$

$$F^{-1} = \langle \psi \otimes \psi \rangle = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_{11} & C_{12} & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} \langle \psi_1 \psi_1 \rangle & \langle \psi_1 \psi_2 \rangle & \cdots & \langle \psi_1 \psi_n \rangle \\ \langle \psi_2 \psi_1 \rangle & \langle \psi_2 \psi_2 \rangle & & \\ & & \langle \psi_3 \psi_3 \rangle & \\ & & \ddots & \langle \psi_n \psi_n \rangle \end{bmatrix}_{n\times n} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \ddots \\ & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

off-Diagonal
غیرقطری
Cross-Correlation

$$A_{MG}[\psi] = \exp\left[-\frac{1}{2} [\psi]^T \cdot \mathrm{Cov}^{-1} \cdot [\psi]\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2} [\psi]^T \cdot F \cdot [\psi]\right]$$

$F \equiv Cov^{-1}$, {Fisher Matrix}

Free Energy

$$F = L[\phi_0] - KT \ln\left[\left(\frac{2\pi}{\beta L''}\right)^{1/2}\right] = L[\phi]_0 - \frac{KT}{2}\ln 2\pi + \frac{KT}{2}\ln(L''\beta)$$

$f = \frac{F}{V^{(d)}}$

کمیت فیزیکی

$$\boxed{F = \underbrace{L[\phi]_0}_{\text{ترتیب صفرم}} + \underbrace{\frac{KT}{2}\ln\beta \overset{K}{L''}[\phi]_0}_{\text{ترتیب اول}} + cts} \; *$$

ترتیب اول

ترتیب دوم

Exercise * $L[\phi] = \int d^d r \, [a_0 + a_2 \phi^2(r) + a_4 \phi^4(r) + (\nabla\phi)^2]$

For Zero-order app.

Determine all critical Expon. $\gamma, \beta, \alpha \ldots$ C_v,

{d-Dimension, n-field → Gaussian approximation

$T > T_c$, $T < T_c$

$[\phi] = \{\phi_1 \ldots \phi_n\}$

$$Z = \int D\phi \, e^{-\beta L[\phi]} \quad , \quad [\phi] = [\phi_0] + [\psi]$$

$$L[\phi] = L[\phi_0] + [\psi]^T \cdot \underbrace{\frac{\partial L}{\partial[\phi]}}_{0} + \frac{1}{2}[\psi]^T \frac{\partial^2 L}{\partial\phi^2}[\psi] + \ldots$$

$$L[\phi] = L[\phi_0] + \frac{1}{2}\sum_{ij} \psi_i \, \frac{R^T R \, \partial^2 L \, R^T R}{\partial\phi_i \partial\phi_j} \psi_j + \ldots$$

$$\Gamma_{ij} = K_{ij} = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right|_{[\phi]=[\phi_0]} = C_{ij} \qquad \left(\begin{array}{l} \varphi = R\psi \\ \Lambda = RKR^T \end{array} \right)$$

$$L[\phi] = L[\phi_0] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \psi_i'^2 \lambda_i \qquad K\psi_i' = \lambda_i \psi_i'$$

Normal mode.

$$e^{-\beta F} = Z = \int \prod_{i=1}^{n} d\phi_i' \, e^{-\beta L[\phi_0]} \, e^{-\frac{\beta}{2}\sum_{i=1}^{n} \psi_i'^2 \lambda_i}$$

$$d\psi_i'$$

$$e^{-\beta F} = e^{-\beta L[\phi_0]} \prod_{i=1}^{n} \left[\int d\psi_i' \, e^{-\frac{\beta \psi_i'^2 \lambda_i}{2}} \right]$$

$$= e^{-\beta L[\phi_0]} \frac{(2\pi)^{n/2}}{\beta^{n/2} (\mathrm{Det}\,\lambda)^{1/2}} \simeq e^{-\beta L[\phi_0] - \ln(\mathrm{Det}\lambda\, \beta^{n/2})}$$

$$F = L[\phi_0] - \frac{1}{2} KT \sum \ln\left(\frac{2\pi}{\beta\lambda}\right)$$

$$= L[\phi_0] + \frac{1}{2} KT \, \mathrm{Tr} \ln \lambda + \mathrm{cts}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \ln \mathrm{Det}\,\lambda &= \sum_i \ln \lambda_i \\ &= \mathrm{Tr} \ln \lambda \end{aligned}}$$

A For $T > T_c \rightarrow [\phi]_0 = 0$

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 + \psi = \psi(r)$$

$$L[\phi] = \int d^d r \left[a_0 + a_2 \phi^2 + a_4 \phi^4 + (\nabla\phi)^2 \right] \qquad a_4 \sim 0$$

$T > T_c$

$$L[\phi] = \tilde{a}_0 V^{(d)} + \int d^d r \left(a_2 \psi(r)^2 + (\nabla\psi)^2 \right)$$

$$= L[\phi_0]\Big|_{\phi_0 = 0} + \int d^d r \, \psi(r) \left(a_2 - \nabla^2 \right) \psi(r)$$

$$K_{ij} \equiv 2(a_2 - \nabla^2)\delta_{ij}$$

For $T > T_c$ $\quad e^{-\beta F} = Z = e^{-\beta L[\phi_0] - \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \ln K + c}$

$$\boxed{F = KT \left[\beta L[\phi_0] + \tfrac{1}{2} \operatorname{Tr} \ln(K) - c\right]} \quad T > T_c$$

$$F = KT \left[\beta a_0 V^{(d)} + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \underbrace{\ln(2[a_2 - \nabla^2])}_{?} - c\right]$$

$$\operatorname{Tr} \ln 2(a_2 - \nabla^2) = \int d^d k \, \langle k | \ln 2(a_2 - \nabla^2) | k \rangle$$

$$= \int_{|k| < \Lambda^{-1}} d^d k \, \ln 2(a_2 + k^2)$$

$$F = KT \left[\beta a_0 V^{(d)} + \frac{1}{2} \int_{|k| < \Lambda^{-1}} d^d k \, \ln 2(a_2 + k^2) - c\right]$$

$$a_2(t) = a_2^{(1)} t = a_2^{(1)} \frac{T - T_c}{T_c}$$

$\frac{da_2}{dT}$

$$C_V = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = -T \left[\underbrace{\int_{|k| \leq \Lambda^{-1}} d^d k \, \frac{a_2'}{a_2 + k^2}}_{?} - \frac{1}{2} \underbrace{\int_{|k| \leq \Lambda^{-1}} d^d k \, \frac{a_2'^2}{(a_2 + k^2)^2}}_{?} \right]$$

$$I_1 \equiv \int d^d k \, \frac{1}{a_2 + k^2}$$

$$I_2 \equiv \int d^d k \, \frac{1}{(a_2 + k^2)^2} \qquad , \quad \boxed{\begin{array}{l} a_2 \sim t \\ \xi \sim t^{-1/2} \end{array}} \Rightarrow \boxed{a_2 \sim \xi^{-2}}$$

ϕ^2 ضریب

$$I_1 = \int_{|k| < \Lambda^{-1}} d^d k \, \frac{1}{\xi^{-2} + k^2} \sim \left[\xi^{2-d}\right]$$

ξ^{-d}

$$I_2 \simeq \left[\xi^{4-d}\right] \longrightarrow \boxed{d>4}$$

واگرایی ندارند

For $d=4$

$$I_1 = \text{محدود است}$$

$$I_2 \sim \ln \Lambda^{-1}\xi$$

For $2<d<4$

$$I_2 \sim \xi^{4-d}$$

$$\chi = ? \longrightarrow \int d^d r\, G(r) = KT\chi$$

$\downarrow$ F.T.

$$\tilde{G}(K=0) = KT\tilde{\chi}(K=0)$$

$$G(r) = \frac{1}{2(a_2-\nabla^2)} \longrightarrow \tilde{G}(k) = \frac{1}{2(a_2+k^2)}$$

$$KT\tilde{\chi}(K=0) = \tilde{G}(0) = \frac{1}{2a_2} = \frac{1}{2a_2^{(1)}t} \rightarrow t^{-1} \sim t^{-\gamma}$$

$$\boxed{\gamma = 1}$$

$r\to\infty$

$K\to 0$

در نزدیکی نقطه بحرانی

Static Response funct

وابستگی زمانی نداریم چون تعادل

ویژگی های سراسری است

For $T<T_c$ $\quad \phi_0 \neq 0 \rightarrow \boxed{\phi_0^2 = -\frac{a_2}{2a_4}}$

$$\phi = \phi_0 + \psi = \frac{-a_2'}{2a_4} + \psi$$

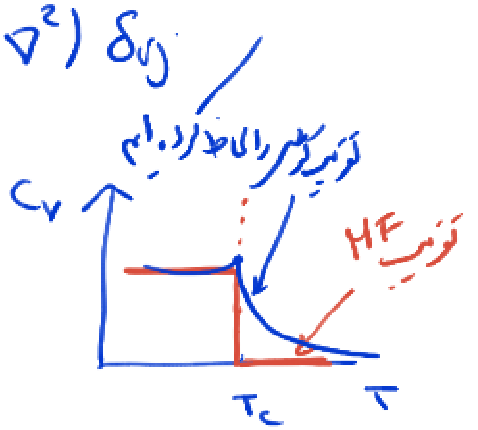
$$L[\phi] = L[\phi_0] + \int d^d r\, \psi(r)\, \overbrace{[-2a_2 - \nabla^2]}\, \psi(r)$$

$$K_{ij} = 2(-2a_2 - \nabla^2)\,\delta_{ij}$$

Exercise. $C_V = ?$

$G = ?$

$\chi = ?$



۹۸/۸/۲۱ بسم الله الرحمن الرحیم

$$e^{-\beta F} = Z = \int D\phi\, e^{-\beta \underbrace{L[\phi]}_{\text{Landau Action}}} \rightarrow L[\phi] = \int d^d r\, \mathcal{L}[\ ]$$

$$[\phi] = \underbrace{[\phi]_0}_{L[\phi]_0 = \text{Minimum}} + [\psi(r)]$$

$$L[\phi] = L[\phi]_0 + \psi \underbrace{\frac{\delta L}{\delta[\phi]}\Big|_0}_{0} + \psi^2 + \cdots$$

Gaussian approximation

$$\boxed{e^{-\beta F} = e^{-\beta L[\phi]_0} \int D\psi\, e^{-\frac{\beta}{2}\int \psi^T \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \psi\, d^d r\, d^d r'}}$$

$$\text{Fisher Information Matrix} \Leftarrow K^{-1}(r, r') = \underline{\mathrm{Cov}} = \overbrace{\text{Green's func}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Correlation fun} \\ \text{Weighted TPFF} \end{array}\right\}$$

4 Cast → $\dfrac{\text{Prediction}}{\text{Model Free Param}}$

* {Correlation function} $[\phi] = [\eta] \leftarrow$ Order Parameter

d_Dimension, ⓝ field

$$\to L[\eta] = \int d^d r \left[\frac{\gamma}{2} (\underbrace{\nabla \eta)^2}_{} + a t \eta^2 + \frac{1}{2} b \overbrace{\eta^4}^{\lambda \phi^4} - H \eta \right] \leftarrow \text{External field}$$

$\eta^2 \leftarrow \eta^T \cdot \eta$, $\eta^4 \leftarrow (\eta^T \cdot \eta)^2$

$$Z = \mathrm{Tr}\left\{ e^{-\beta L[\eta]} \right\} = \underbrace{\int D\eta}_{\text{Coarse graining}} \, e^{-\beta L[\eta]} = \int \underbrace{\prod_{i=1}^{N_\eta} d\vec{\eta}_i}_{} \, e^{-\beta L[\eta]}$$

Notation

① $\eta(r) = \frac{1}{V^{(d)}} \sum_K \eta_K e^{i \vec{K} \cdot \vec{r}}$

$$\sum_K \longrightarrow \frac{V^{(d)}}{(2\pi)^d} \int d^d K$$

② • $\frac{\delta}{\delta \eta(r)} \int d^d r' \, \eta(r') = 1$

• $\frac{\delta}{\delta \eta(r)} \eta(r') = \delta(r - r') \leftarrow$

Prove it

• $\frac{\delta}{\delta \eta(r)} \int d^d r' \, \frac{1}{2} (\nabla \eta(r'))^2 = -\nabla^2 \eta(r)$

$$\langle \eta(r) \rangle = -\frac{\delta F}{\delta H(r)}$$

$$\chi(r - r') = \frac{\delta \langle \eta(r) \rangle}{\delta H(r')} = -\frac{\delta^2 F}{\delta H(r) \, \delta H(r')} = \beta G(r - r')$$

$$\boxed{G(r-r') = K_B T\, \chi(r-r')}$$

↓

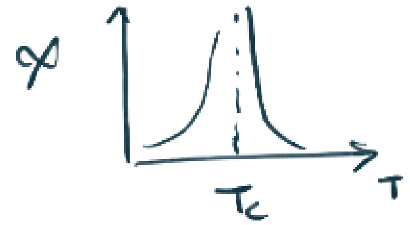
Fourier Transformation

$$\tilde{G}(K) = \frac{1}{\beta}\,\tilde{\chi}(K)$$

→ Static Susceptibility $\quad K=0 \to [K]=[L]^{-1}$ ↓ $L \to \infty$

$$\tilde{\chi}(0) = \beta\, \tilde{G}(0)$$

$\xi \to \infty$ ←



? $\boxed{G(r-r') \text{ or } \tilde{G}(K)}$?

* Finding the Evolution Equation for G *

Differential Eqn

$$\begin{cases} ① \; \langle \eta \rangle = -\dfrac{\partial F}{\partial H} \\ ② \; \chi = \beta G = \dfrac{\partial \langle \eta \rangle}{\partial H} = \dfrac{\partial \eta}{\partial H}\Big|_{\eta = \langle \eta \rangle} \end{cases}$$

$\langle \eta \rangle = ?$ → $\boxed{0 = \dfrac{\partial L}{\partial \eta}\Big|_{\eta=\langle\eta\rangle}}$

$$0 = \frac{\delta}{\delta \eta(r)} \int d^d r \left[\frac{\gamma}{2}(\nabla \eta)^2 + a t \eta^2 + \frac{1}{2} b \eta^4 - H\eta \right] \Big|_{\eta = \langle \eta \rangle}$$

$$\delta = \eta - \bar{\eta}$$

$$0 = \frac{-\gamma \nabla^2 \langle \eta(r) \rangle + 2at\langle \eta \rangle + 2b\langle \eta \rangle^3 - H}{\langle \eta \rangle}$$

معادله حاکم بر $\langle \eta \rangle$

$$\frac{\delta}{\delta H(r')}\left[-\gamma \nabla^2 \langle \eta(r) \rangle + 2at\langle \eta(r) \rangle + 2b\langle \eta(r) \rangle^3 - H(r)\right] = 0$$

$$\boxed{-\gamma \nabla^2 \chi(r-\bar{r}) + 2at\,\chi(r-r') + 6b\langle \eta(r) \rangle^2 \chi(r-r') - \delta_D(r-r') = 0}$$

$$\left[-\gamma \nabla^2 + 2at + 6b\langle \eta \rangle^2\right]\chi(r-r') = +\delta_D(r-r')$$

$$\boxed{\eta_0 \to \langle \eta \rangle}$$

For G

$$\underbrace{\beta\left[-\gamma \nabla^2 + 2at + 6b\langle \eta \rangle^2\right]}\, G(r-r') = \delta_D(r-r')$$

$$L \leftarrow \boxed{\hat{O}\, G(r-r') = \delta_D(r-r')}$$

Recall

$$\hat{O} f = g \rightarrow f = f^h + f^p$$

$$f = f^h + \int dx'\, G\, g(x')$$

$$\hat{O} f = \hat{O} f^h + \int dx'\, \hat{O}_x G(x,x')\, g(x')$$

$$g = \hat{O} f = 0 + \int dx'\, \hat{O}_x G\, g(x')$$

$$g(x) = \int dx'\, \hat{O} G\, g(x')$$

$\delta(x-x')$

$$\boxed{\hat{O}\, G = \delta(x-x')}$$

(A) For $t>0 \longrightarrow T>T_c \longrightarrow \langle\eta\rangle = 0$

$$\left[-\nabla^2 + \xi_>^{-2}\right] G(r-r') = \frac{K_B T}{\gamma}\,\delta(r-r')$$

$$\boxed{\xi_> \equiv \left(\frac{\gamma}{2at}\right)^{1/2}} \longrightarrow \xi_> \sim t^{-1/2} = t^{-\nu} \qquad \boxed{\nu_> = 1/2}$$

(B) For $t<0$ $\quad T<T_c\ ,\quad \eta_0 = \pm\left(-\frac{at}{b}\right)^{1/2}$

$$\left(-\nabla^2 + \xi_<^{-2}\right) G(r-r') = \frac{K_B T}{\gamma}\,\delta_D(r-r')$$

$$\boxed{\xi_< = \left(-\frac{\gamma}{4at}\right)^{1/2}} \longrightarrow \xi_< \sim t^{-1/2} \qquad \boxed{\nu_< = 1/2}$$

$$G(r) = \frac{\pi^{\frac{(1-d)}{2}}}{2^{\frac{(1+d)}{2}}}\;\frac{K_B T}{\gamma}\;\frac{e^{-r/\xi}}{r^{\frac{d-2}{2}}}\;\frac{1}{\xi^{(d-3)/2}}$$

For $T\neq T_c$, $r \gg \xi$

طول تبزلی

for $1 \ll k \rightarrow \xi \gg 1$, $d > 2$

$$G(r) = \frac{K_B T}{\gamma} \frac{\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}{4\pi^{d/2}} \frac{1}{r^{d-2}}$$

8.3 : Dynamical Critical Exponent

Thermodynamical Equilibrium

تعادل ترمودینامیکی { تعادل گرمایی، تعادل مکانیکی، تعادل شیمیایی }

Stationary and static

$$\boxed{\hat{O}[f] = C[f]}$$

Semi-classical Boltzmann Equation

PDF

Collision

fluctuation Dissipation theorem

"Small Time-Dependent fluctuation"

$$\eta \longrightarrow \eta(r, t)$$

Time *

زمان

$$\cancel{\left\{ t \equiv \frac{T - T_c}{T_c} \right\}}$$

(دمای کاهش یافته)

$$= \frac{\partial L}{\partial h_{\dots}} \Big|$$

$\ldots(\bar r,t)\big|_{\bar\eta} = 0$

$$\frac{\partial \eta(\bar r,t)}{\partial t} = -\Gamma \frac{\delta L}{\delta \eta(r,t)}$$

$(\bar\eta)$ Static Solution

نوفه

$$\frac{\partial \eta(\bar r,t)}{\partial t} = -\Gamma \frac{\delta L}{\delta \eta(r,t)} + \underbrace{\xi(r,t)}_{\text{Noise term}}$$

هدف حل معادله کردن η که در آن یک جمله غیرقطعی (نوفه) وجود دارد است

"Stochastic Equation"

$\xi(r,t) = ? \longrightarrow$ خواص آماری این جمله $\left\{ \begin{array}{l} \langle \xi(r,t) \rangle = ? \\ \langle \xi(r,t)\,\xi(r',t') \rangle = ? \\ P(\xi) = ? \end{array} \right\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \xi(r,t) \rangle = 0 \\ \langle \xi(r,t)\,\xi(r',t') \rangle = D\, \underbrace{\delta_D(\bar r - \bar r')}_{\text{spatial}}\, \underbrace{\delta_{tt'}}_{\text{temporal}} \\ \text{C.L.T.} \qquad (\ldots\ \mathrm{id}\ \xi^2(r,t)) \end{array} \right\}$$

$$\left(P(\xi) = \exp\left[-\frac{1}{2D} \int dt\, dr\, \xi^{2}(r,t) \right] \right)$$

N-joint pdf

$\eta(r,t) \leftarrow$ "Stochastic variable" $\rightarrow$

$$\frac{\partial \eta(r,t)}{\partial t} = \checkmark \longrightarrow \underbrace{\frac{\partial P_\eta}{\partial t} = ?}$$

Kramers-Moyal Expansion (Master-Equation)

$\downarrow$

Fokker-Planck Equation

$$?: \frac{\partial P_\eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \langle \overbrace{\delta_D(\eta - \eta')} \rangle_{\eta'} = \frac{\partial}{\partial t} \langle \delta_D(\eta - \eta') \rangle_{\xi}$$

$$\frac{\partial P_\eta}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \delta_D(\eta - \eta') \right\rangle_\xi = \int d^d_{r'} \left\langle \frac{\partial \eta'(r')}{\partial t} \frac{\delta}{\delta \eta'(r')} \delta_D(\eta - \eta') \right\rangle_\xi$$

$P(\eta)$

$$= -\int d^d_{r'} \frac{\delta}{\delta \eta} \left\langle \frac{\partial \eta'}{\partial t} \delta_D(\eta - \eta') \right\rangle_\xi$$

$$= -\int d^d_{r'} \frac{\delta}{\delta \eta} \left\langle \left[-\Gamma \frac{\delta L}{\delta \eta'(r')} + \xi(r',t) \right] \delta_D(\eta - \eta') \right\rangle_\xi$$

$$= \int d^d_{r'} \frac{\delta}{\delta \eta(r')} \left[+\Gamma \frac{\delta L}{\delta \eta} P(\eta) - \underbrace{\langle \xi(r',t)\, \delta_D(\eta - \eta') \rangle_\xi}_{\text{Exercise}} \right]$$

$$\boxed{\frac{\partial P_\eta}{\partial t} = \int d^d r' \, \frac{\delta}{\delta \eta(r')} \left[\Gamma \frac{\delta L}{\delta \eta} P(\eta) + \frac{D}{2} \frac{\delta P}{\delta \eta} \right]}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \eta}{\partial t} = -\Gamma \underbrace{\dfrac{\delta L}{\delta \eta}}_{?=\checkmark} + \xi(r,t) \\ \delta\eta = \eta - \bar{\eta}(T) \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{\eta}(T > T_c) = 0 \\ \bar{\eta}(T < T_c) \neq 0 \end{Bmatrix}$$

$$(\nabla \eta)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta\eta = -\Gamma \left(\frac{1}{2} \gamma \nabla^2 (\delta\eta) + 2a \, \delta\eta \right) + \xi(r,t)$$

$a_0 t \leftarrow$ [illegible]

نهایتاً معادله حاکم بر افت و خیز پارامتر نظم به صورت:

$$\delta\eta \equiv \eta - \bar{\eta}$$

$$\boxed{\frac{\partial \delta\eta}{\partial t} = -\frac{\delta\eta}{\tau_0} + \gamma \Gamma \nabla^2 \delta\eta + \xi \qquad \tau_0 \equiv (2a\Gamma)^{-1}}$$

$$-K^2 = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$$

F. T. $\rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \delta\eta_K = -\frac{\delta\eta_K}{\tau_K} + \xi_K}$$

$$\boxed{\tau_K^{-1} = \tau_0^{-1} + \gamma \Gamma K^2}$$

مفهوم فیزیکی معادله تحول $\delta\eta_K$ چیست؟

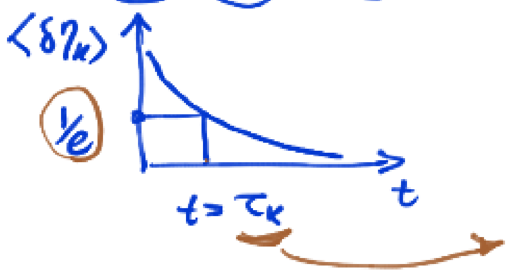
$$\frac{\partial \delta\eta_K}{\partial t} = -\frac{\delta\eta_K}{\tau_K} + \xi$$

$\frac{\partial \delta\eta_k}{\partial t} = -\frac{\delta\eta_k}{\tau_k} + \xi_k$ درحالت تعادل

$\eta - \bar{\eta} \rightarrow \delta\eta = 0$

if $\left\langle \frac{\partial \delta\eta_k}{\partial t} \right\rangle_{ens} = -\left\langle \frac{\delta\eta_k}{\tau_k} \right\rangle_{ens} + \langle \xi_k \rangle_{ens}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \delta\eta_k \rangle = -\frac{\langle \delta\eta_k \rangle}{\tau_k} + 0 \longrightarrow \langle \delta\eta_k \rangle \sim e^{-t/\tau_k}$$

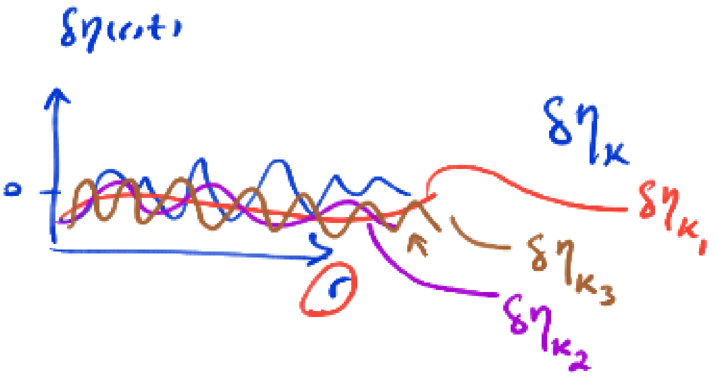


$\tau_k \equiv$ زمان واهلش

مدهای مختلف فوریه

وابستگی مدها به مقیاس زمان

$\delta\eta =$



$$K_1 < K_2 < K_3$$

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$$

$K = 0 \longrightarrow \lambda \rightarrow \infty \rightarrow$ Global Mode

$$\tau_{K=0} = \tau_0 \simeq (2a\Gamma)^{-1}$$

یعنی زمان واهلش ≈ زمان همبستگی مد سراسری در سیستم متناسب با a^{-1}

$\underbrace{\text{مد سراسری}}_{K=0,\ \lambda \rightarrow \infty}$

به یاد داریم که $a \sim \xi^{-2}$

طول همبستگی ...

جمل. این پارامتر نظم در فضاها مختلف سیستم مورد مطالعه

که در $T \to T_c$ $\quad \xi \to \infty$ $\leftarrow$

$$\tau_{K=0} = \tau_0 \sim a^{-1} \sim \xi^2 \longrightarrow \infty$$

در اندازه محدود همان اندازه سیستم است L

$$\langle \delta\eta_{K=0} \rangle \sim e^{-t/\tau_0} \sim e^{-t/\xi^2}$$

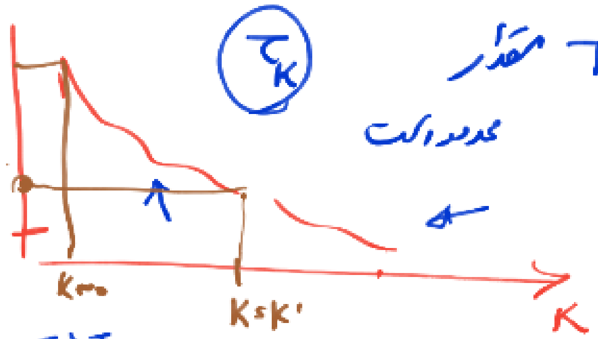
یعنی علاوه بر اینکه $\delta\eta \to 0$ یعنی کمیت نوسان پذیر پارامتر نظم همان $\bar{\eta}$

و تغییرات زمانی در مقدار $\bar{\eta}$ خیلی کند است که

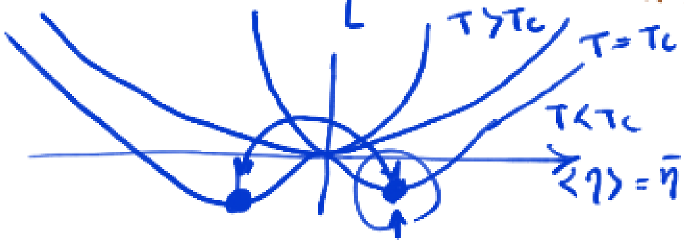
بزرگ سایر مدها $K \neq 0$ که علی الاصول سهم غالب در تغییرات فضایی $\delta\eta$ دارند

$|\delta\eta_K|^2$

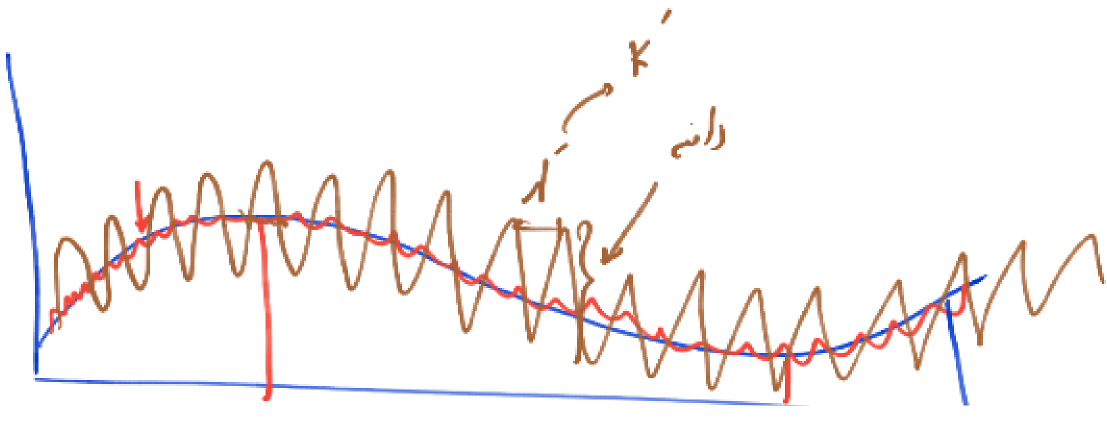
طیف توان است



τ_K در $T=T_c$ مقدار محدود است



$+\bar{\eta} \to -\bar{\eta}$



Trend روند غالب توصیف می‌شود ولی همچنان اجازه وجود افت‌وخیزهای کوچک
که البته هرچقدر که به $T \to T_c$ نزدیک‌تر شویم دامنه‌ها نیز کاهش می‌یابد، وجود دارد.

$$\tilde{\chi}(K,\omega) = \frac{\delta \langle \tilde{\eta}(K,\omega) \rangle}{\delta H(K,\omega)}$$

$$\chi(r,t) = \frac{1}{V^{(d)}} \underbrace{\sum_K}_{\int \frac{d^d K}{(2\pi)^d}} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t)} \tilde{\chi}(K,\omega)$$

$$\int \frac{d^d K}{(2\pi)^d} \int \frac{d\omega}{2\pi} \cdots$$

میدان خارجی

$$\frac{\delta \eta(r,t)}{\delta t} = -\frac{\eta(r,t)}{\tau_0} + \gamma\Gamma \nabla^2 \eta(r,t) + \xi(r,t) + H\Gamma$$

$$\chi = \frac{\delta \langle \eta \rangle}{\delta H}$$

$$\frac{\delta \chi(r,t)}{\delta t} = -\frac{\chi(r,t)}{\tau_0} + \gamma\Gamma \nabla^2 \chi(r,t) + \Gamma$$

F.T $(r,t) \longrightarrow (K,\omega)$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega \\ \frac{\partial}{\partial x} = iK \end{cases}$$

$$-i\omega \tilde{\chi}(K,\omega) = -\frac{\tilde{\chi}(K,\omega)}{\tau_0} - \gamma\Gamma K^2 \tilde{\chi}(K,\omega) + \tilde{\Gamma}$$

$$\boxed{\tilde{\chi}(K,\omega) = \frac{\tilde{\Gamma}}{-i\omega + \tau_K^{-1}}}$$

در $T\to T_c$ داریم $\tau_0\to\infty$

$$T\to T_c \qquad \tilde{\chi}(K=0,\omega)=\frac{\Gamma}{-i\omega+0}$$

Static Response function $\omega=0$

Dominant part $\longrightarrow$ $\tilde{\chi}(K=0,\omega=0)\to\infty$

Dynamic Response fun has finite value

← تمرین شبیه‌سازی → ۱۴

اگر یک مطلع شده که آیا $\bar{\eta}$ وابسته به t است یا فقط ...؟

$\delta\eta=\eta-\bar{\eta}$ وابسته به زمان است؟

جواب:

زمان

$\eta(\vec{r},t)$

ترمودینامیک تعادلی

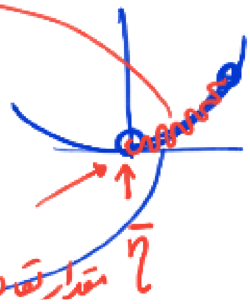
$$L=\int d^d r\,\left[\tfrac{1}{2}\gamma(\nabla\eta)^2+\bar{a}\,\eta^2+b\eta^4-H\eta\right]$$

$$\underbrace{\eta-\bar{\eta}}$$

{ جزئیات سیستم درجات آزادی داخلی }

Black-Box

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=-\Gamma\,\underbrace{\frac{\delta L}{\delta\eta}}+\underbrace{\xi(r,t)}$$



مقدار تعادلی $\bar{\eta}$

...pendent

...burg

Time-Dep
Landau-Ginz
Theory

آیا خود مقدار تعادلی پارامتر نظم می‌تواند وابسته به زمان باشد یا نه ؟

Quasi-static Evolution

مشخصات ترمودینامیکی خوش تعریف یعنی قابل تعمیم به کل سیستم مورد مطالعه

کماکان می‌توان وابستگی زمانی در پارامتر نظم در نظر گرفت و هنوز ادعا کرد که در وضعیت

تعادل ترمودینامیکی قرار داریم.